1º φυλλάδιο Ασκήσεων Ημερομηνία παράδοσης: 27/3/2013

Μαθηματική ανάλυση II

Άσκηση 1

Θεωρούμε $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, τότε έχουμε:

$$N_3(\vec{x})\le N_1(\vec{x}) \iff \max_{1\le i\le n}|x_i| \le \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2} \iff \left(\max_{1\le i\le n}|x_i|\right)^2 \le x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2$$

που ισχύει. Ακόμα έχουμε:

$$N_1(\vec{x})\le N_2(\vec{x}) \iff \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2} \le |x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|$$
$$\iff x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 \le (|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|)^2$$
$$\iff x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 \le x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2+2\sum_{1\le i<j\le n}|x_i x_j|$$
$$\iff 0\le 2\sum_{1\le i<j\le n}|x_i x_j|,$$ που ισχύει.

Για την ανισότητα που μας λείπει γράφουμε έχουμε:

$$N_2(\vec{x})\le n N_3(\vec{x}) \iff |x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|\le n\left(\max_{1\le i\le n}|x_i|\right),$$ που ισχύει.

Από την διπλή ανίσωση, $N_3(\vec{x})\le N_1(\vec{x})\le N_2(\vec{x})\le n\, N_3(\vec{x})$, για κάθε $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, προκύπτει ότι οι νόρμες είναι ισοδύναμες, αφού οι νόρμες $N_1(\vec{x})$ και $N_2(\vec{x})$ επί του $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμες, αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\alpha,\beta>0$, τέτοιοι ώστε $\alpha N_1(\vec{x})\le N_2(\vec{x})\le \beta N_1(\vec{x})$, για κάθε $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$

Άσκηση 2

Για τη συνάρτηση $d(\vec{x},\vec{y})$ ισχύουν:

I. $d(\vec{x},\vec{y}) := \dfrac{d_1(\vec{x},\vec{y})}{1+d_1(\vec{x},\vec{y})}\ge 0$, για κάθε $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$, αφού $d_1(\vec{x},\vec{y})\ge 0$,

$\forall\, x,y\in\mathbb{R}^n$. Επιπλέον ισχύει:

$$d(\vec{x},\vec{y}) := \frac{d_1(\vec{x},\vec{y})}{1+d_1(\vec{x},\vec{y})}=0 \iff d_1(\vec{x},\vec{y}) \iff \vec{x}=\vec{y}$$

άρα η συνάρτηση d_1 είναι απόσταση επί του $\mathbb{R}^n$.

II. Συμμετρική ιδιότητα

$$d(\vec{x},\vec{y}) \leq d(\vec{x},\vec{z}) + d(\vec{z},\vec{y}) \iff \frac{d_1(\vec{x},\vec{y})}{1+d_1(\vec{x},\vec{y})} = \frac{d_1(\vec{y},\vec{x})}{1+d_1(\vec{y},\vec{x})} \iff$$

$$\iff d_1(\vec{y},\vec{x}) = d_1(\vec{y},\vec{x}), \quad \forall\ \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

III. Τριγωνική ανισότητα

$$d(\vec{x},\vec{y}) \leq d(\vec{x},\vec{z}) + d(\vec{z},\vec{y}) \iff \frac{d_1(\vec{x},\vec{y})}{1+d_1(\vec{x},\vec{y})} \leq \frac{d_1(\vec{x},\vec{z})}{1+d_1(\vec{x},\vec{z})} + \frac{d_1(\vec{z},\vec{y})}{1+d_1(\vec{z},\vec{y})}$$

$$\iff d_1(\vec{x},\vec{y})(1+d_1(\vec{x},\vec{z}))(1+d_1(\vec{z},\vec{y})) \leq d_1(\vec{x},\vec{z})(1+d_1(\vec{x},\vec{y}))(1+d_1(\vec{z},\vec{y})) + d_1(\vec{z},\vec{y})(1+d_1(\vec{x},\vec{y}))(1+d_1(\vec{x},\vec{z}))$$

$$\iff d_1(\vec{x},\vec{y}) + d_1(\vec{x},\vec{y})d_1(\vec{x},\vec{z}) + d_1(\vec{x},\vec{y})d_1(\vec{z},\vec{y}) + d_1(\vec{x},\vec{y})d_1(\vec{x},\vec{z})d_1(\vec{z},\vec{y})$$
$$\leq d_1(\vec{x},\vec{z}) + d_1(\vec{z},\vec{y}) + d_1(\vec{x},\vec{y})d_1(\vec{x},\vec{z}) + d_1(\vec{x},\vec{y})d_1(\vec{z},\vec{y}) + 2d_1(\vec{x},\vec{z})d_1(\vec{z},\vec{y})$$
$$+ d_1(\vec{x},\vec{y})d_1(\vec{z},\vec{y}) + 2d_1(\vec{x},\vec{z})d_1(\vec{z},\vec{y})$$

$$\iff d_1(\vec{x},\vec{y}) \leq d_1(\vec{x},\vec{z}) + d_1(\vec{z},\vec{y}) + 2d_1(\vec{x},\vec{z})d_1(\vec{z},\vec{y}) + 2d_1(\vec{x},\vec{y})d_1(\vec{x},\vec{z})d_1(\vec{z},\vec{y})$$

που ισχύει

Άσκηση 3

Παρατηρούμε ότι: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ και $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^n = e^{-3}$, οπότε ισχύει:

$$\lim_{n\to+\infty} \vec{x_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \left(1-\frac{3}{n}\right)^n\right) = \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}, \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n\right) = (0, e^{-3})$$

Το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει, αφού δεν υπάρχει το $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n}{2n+1}$, καθώς η υπακολουθία των άρτιων όρων έχει όριο $\frac{1}{2}$, ενώ η υπακολουθία των περιττών όρων έχει όριο $-\frac{1}{2}$.

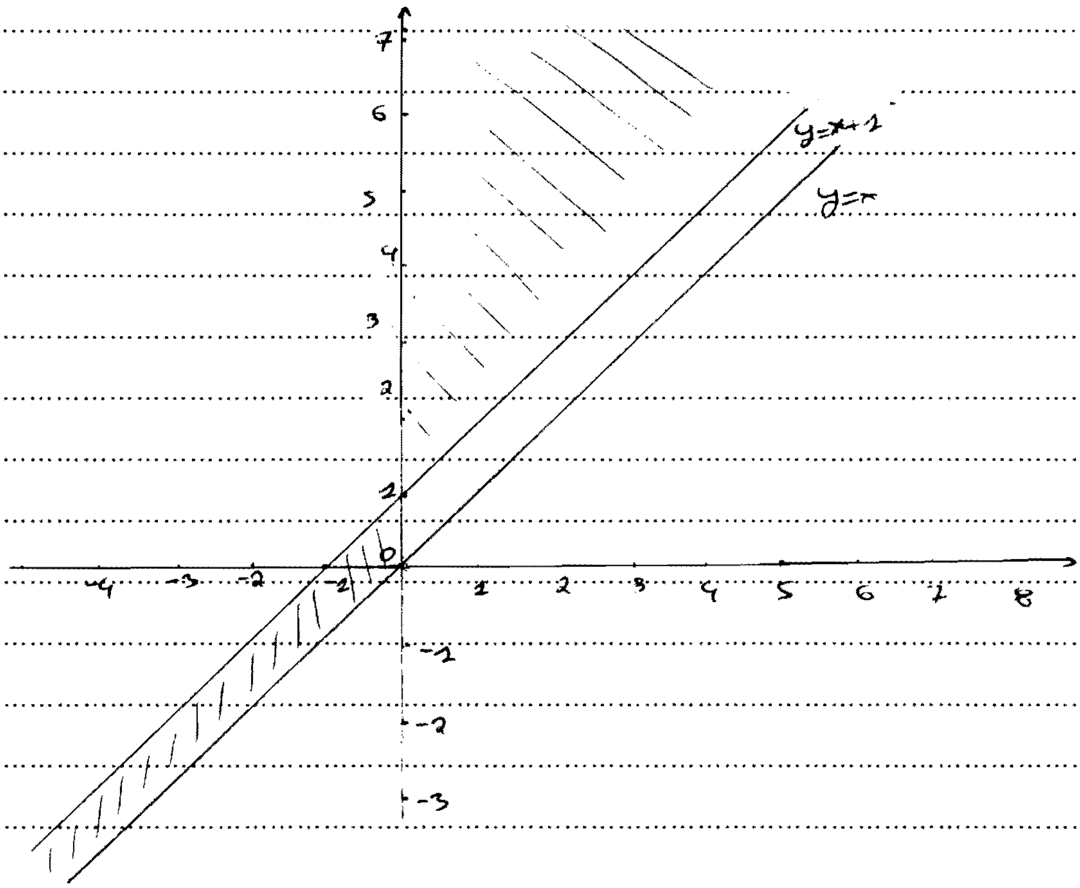
Άσκηση 4

(α) Για κάθε σημείο $(n,0)$ του A, υπάρχει ανοικτός δίσκος $D((n,0),\varepsilon)$ με $0<\varepsilon<1$ έτσι ώστε $D((n,0),\varepsilon)\cap A=\{(n,0)\}$, δηλαδή κάθε σημείο του A είναι μεμονωμένο. Επιπλέον κάθε σημείο του A είναι συνοριακό σημείο, οπότε θα είναι $\partial A = A$.

(β) Το σύνολο A είναι κλειστό γιατί περιέχει όλα τα συνοριακά σημεία του όμως δεν είναι φραγμένο. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι το σύνολο A είναι φραγμένο, τότε θα υπάρχει $M>0$, τέτοιο ώστε να ισχύει $\|(n,0)-(0,0)\|=\|(n,0)\|=|n|<M$, για κάθε ακέραιο n, που είναι άτοπο. Συνεπώς το σύνολο A δεν είναι συμπαγές.

Άσκηση 5

$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y-x>0 \text{ και } x\ln(y-x)>0\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y-x>0 \text{ και } x>0,\ \ln(y-x)>0 \text{ ή } x<0,\ \ln(y-x)<0\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y-x>0 \text{ και } x>0,\ y-x>1 \text{ ή } y-x>0 \text{ και } x<0,\ y-x<1\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ y>1+x \text{ ή } x<0,\ x<y<1+x\}$$



Άσκηση 6

(α) Επίπεδο που περιέχει τον άξονα x'x.

(β) Σφαίρα κέντρου $O(2,0,2)$ και ακτίνας $α=2$.

(γ) Κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρα παράλληλη στην ευθεία που ορίζεται από τα επίπεδα: $2x+z=0$, $y+z=0$.

(δ) Κυκλικός κύλινδρος με άξονα τον xx'.

(ε) $x^2-y^2-2z(x-y)=0 \iff (x-y)(x+y-2z)=0 \iff x-y=0$ ή $x+y-2z=0$.
οπότε έχουμε την ένωση των επιπέδων με εξισώσεις $x-y=0$, $x+y-2z=0$.

(στ) Έχουμε εξίσωση ομογενή βαθμού 2 ως προς τις μεταβλητές x,y,z, οπότε η εξίσωση παριστάνει κωνική επιφάνεια με κέντρο $K(0,0,0)$

(ζ) Είναι εξίσωση ελλειπτικού παραβολοειδούς

(η) Η εξίσωση γράφεται $\dfrac{(x-2)^2}{2^2}+y^2+z^2=1$, οπότε έχουμε ελλειπτικό παραβολοειδές με μήκη ημιαξόνων 2, 1, 1.

(θ) Υπερβολικό παραβολοειδές

(ι) Μονόχωνο υπερβολοειδές

Άσκηση 7

(α) Με απαλοιφή του z από τις δύο εξισώσεις προκύπτει ο προβάλλων κύλινδρος $x^2+2y^2=9$, οπότε η προβολή της καμπύλης στο επίπεδο xOy $(z=0)$ είναι η έλλειψη $x^2+2y^2=9$, $z=0$
$\iff \dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$, $z=0$.

(β) Με απαλοιφή του z από τις δύο εξισώσεις προκύπτει ο προβάλλων κύλινδρος $x^2+y^2-2x=0 \iff (x-1)^2+y^2=1$, οπότε η προβολή της καμπύλης στο επίπεδο xOy $(z=0)$ είναι ο κύκλος $(x-1)^2+y^2=1$, $z=0$

Άσκηση 8

(α) $f(x,y)=2-x+y=c \iff -x+y=c-2$, $c\in\mathbb{R}$ (οικογένεια ευθειών)

(β) $f(x,y)=1-|x|-|y|=c \iff |x|+|y|=1-c$, $c\le 1$ (οικογένεια τετραγώνων)

(γ) $f(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x}}=c \iff y=c\sqrt{x}$, $c\in\mathbb{R}$ (οικογένεια παραβολών)

(δ) $f(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2}{4z}=c \iff x^2+y^2=4cz$ (οικογένεια παραβολοειδών εκ περιστροφής)

(ε) $f(x,y,z)=e^{x+y-z}=c \iff x+y-z=\ln c$, $c>0$ (οικογένεια επιπέδων)

(στ) $f(x,y,z)=-x^2+y^2-z^2=c$ (οικογένεια δίχωνων παραβολοειδών)

Άσκηση 9

(i) Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες και τα μοναδιαία διανύσματα της $\vec{e_\rho}$ και $\vec{e_\theta}$, οπότε το δοσμένο διανυσματικό πεδίο λαμβάνει τη μορφή:

$$\vec{V}(\rho,\theta) = -\frac{a}{a}[(\cos\theta)\vec{i}+(\sin\theta)\vec{j}] = \vec{e_\theta}$$

Οπότε το δοσμένο διανυσματικό πεδίο σε κάθε σημείο (x,y) πάνω στον κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2=a^2$ έχει κατεύθυνση αντίθετη από αυτήν του διανύσματος $\vec{e_\theta}$ και μέτρο ίσο με 1.

(ii) Όμοια με την παραπάνω διαδικασία βρίσκουμε:

$$\vec{V}(\rho,\theta) = -\frac{2a}{4a}[(\cos\theta)\vec{i}+(\sin\theta)\vec{j}] = -\frac{1}{2}\vec{e_\theta}$$

Οπότε το δοσμένο διανυσματικό πεδίο σε κάθε σημείο (x,y) πάνω στον κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2=4a^2$ έχει κατεύθυνση αντίθετη από αυτήν του διανύσματος $\vec{e_\theta}$ και μέτρο ίσο με $\frac{1}{2}$.

Συνεπώς τα σημεία του ρευστού κάνουν κυκλικές κινήσεις σε ομόκεντρους κύκλους με κέντρο την αρχή $O(0,0)$ και ακτίνα ρ, $\rho\ge a$.

Άσκηση 10

Με χρήση πολικών συντεταγμένων έχουμε: $f(\rho,\theta)=\dfrac{\sin\rho^2}{\rho^2}\xrightarrow[\rho\to 0^+]{} 1$, οπότε το 1 είναι πιθανό όριο της συνάρτησης.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι στο σύνολο $D=\left\{(x,y): x^2+y^2 < \frac{\pi}{2}\right\}$ ισχύει ότι $\cos(x^2+y^2) < \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} < 1$, οπότε χρησιμοποιώντας το κριτήριο παρεμβολής, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos(x^2+y^2) = 1$.

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με τον ορισμό, αφού ισχύει:

$$|\cos(x^2+y^2)-1| = 2\sin^2\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) \leq 2\cdot\frac{x^2+y^2}{2} = x^2+y^2,$$

οπότε για να ισχύει $|\cos(x^2+y^2)-1|<\varepsilon$, αρκεί να ισχύει: $x^2+y^2<\varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{\varepsilon}$. Έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε τον ορισμό του ορίου λαμβάνοντας $\delta=\sqrt{\varepsilon}$. Άρα έχουμε:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1.$$

(ii) Με χρήση πολικών συντεταγμένων λαμβάνουμε:

$$f(\rho,\theta) = \rho(\cos^3\theta - \sin^3\theta) \xrightarrow[\rho\to 0^+]{} 0 \quad (\text{πιθανό όριο})$$

Επιπλέον έχουμε:

$$\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x-y|\cdot(x^2+xy+y^2)}{x^2+y^2} \leq \frac{(|x|+|y|)\left(x^2+y^2+\frac{x^2+y^2}{2}\right)}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{x^2+y^2} = 3\sqrt{x^2+y^2}$$

οπότε για να ισχύει $\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon$, αρκεί να ισχύει: $3\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} < \frac{\varepsilon}{3}$

Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τον ορισμό του ορίου με $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, οπότε πράγματι έχουμε ότι:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = 0$$

(iii) Εργαζόμενοι πάλι σε πολικές συντεταγμένες διαπιστώνουμε ότι το πιθανό όριο είναι το 0. Στη συνέχεια, αν επιλέξουμε $\varepsilon \in (0,1)$, έχουμε:

$$\left|e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{e^{\frac{1}{x^2+y^2}}} < \varepsilon \iff e^{\frac{1}{x^2+y^2}} > \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{x^2+y^2} > \ln\frac{1}{\varepsilon} = -\ln\varepsilon.$$

$$\iff x^2+y^2 < -\frac{1}{\ln\varepsilon} \iff \sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{\sqrt{-\ln\varepsilon}}$$ οπότε ισχύει ότι:

Για κάθε $\varepsilon > 0$, με $\varepsilon \in (0,1)$ υπάρχει $\delta = \frac{1}{\sqrt{-\ln\varepsilon}} > 0$, έτσι ώστε

αν $\sqrt{x^2+y^2} < \delta = \frac{1}{\sqrt{-\ln\varepsilon}}$, τότε $\left|e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right| < \varepsilon$

Στη περίπτωση που είναι $\varepsilon \geq 1$, τότε για οποιοδήποτε $\delta > 0$, ισχύει η σχέση:

$$\left|e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right| < \varepsilon$$

Επομένως είναι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = 0$.

(iv) Έστω $f(x,y) = x^y$. Θεωρούμε την ακολουθία $\vec{x_n} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ και έχουμε $f(\vec{x_n}) = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, αφού $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,

αν όμως θεωρήσουμε την ακολουθία $\vec{y_n} = \left(\frac{1}{e^n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$, τότε έχουμε:

$$f(\vec{y_n}) = \left(\frac{1}{e^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{(e^n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{e} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} \neq 1$$

Επομένως δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο

(v) Θεωρούμε την ακολουθία $\vec{x_n} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0,0)$ και έχουμε $f(\vec{x_n}) = \dfrac{\frac{1}{n^3}}{\frac{3}{n^2}} = \frac{1}{3n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Επειδή το ίδιο συμβαίνει και για άλλες μη ειδικές ακολουθίες θεωρούμε ότι το 0 είναι το πιθανό όριο

Για να ισχύει: $|f(x,y,z)-0| = \frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2} < \epsilon$, αρκεί να ισχύει

$$\frac{|xy||z|}{x^2+y^2+z^2} \le \frac{\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2} < \epsilon.$$

Άρα είναι: $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = 0$.

(vi) Θεωρούμε τις ακολουθίες

$\vec{x_\nu} = \left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) \to (0,0,0)$ και $\vec{y_\nu} = \left(\frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \frac{3}{\nu}\right) \to (0,0,0)$

και έχουμε:

$$f(\vec{x_\nu}) = \frac{\frac{1}{\nu^2}}{\frac{3}{\nu^2}} = \frac{1}{3} \xrightarrow[\nu\to+\infty]{} \frac{1}{3}, \quad f(\vec{y_\nu}) = \frac{\frac{2}{\nu^2}}{\frac{11}{\nu^2}} = \frac{2}{11} \xrightarrow[\nu\to+\infty]{} \frac{2}{11} \neq \frac{1}{3}$$

Επομένως δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο.

(vii) Θεωρούμε τις ακολουθίες

$\vec{x_\nu} = \left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) \to (0,0,0)$ και $\vec{y_\nu} = \left(\frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \frac{3}{\nu}\right) \to (0,0,0)$

και έχουμε

$$f(\vec{x_\nu}) = \frac{0}{\frac{3}{\nu^2}} = 0 \xrightarrow[\nu\to+\infty]{} 0, \quad f(\vec{y_\nu}) = \frac{\frac{-5}{\nu^2}}{\frac{11}{\nu^2}} = \frac{-5}{11} \xrightarrow[\nu\to+\infty]{} \frac{-5}{11} \neq 0$$

Επομένως δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο.

Επίσης θα μπορούσαμε να εργαστούμε κατά μήκος των ημιευθειών

$\vec{r}(t) = t(a,\beta,\gamma)$, όπου $(a,\beta,\gamma) \neq (0,0,0)$ και $t>0$

οπότε λαμβάνουμε

$$f(\vec{r}(t)) = \frac{a^2-\beta\gamma}{a^2+\beta^2+\gamma^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{a^2-\beta\gamma}{a^2+\beta^2+\gamma^2}$$

δηλαδή το όριο που προκύπτει εξαρτάται από την θεωρούμενη ημιευθεία. Επομένως δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο.

Άσκηση 11

(i) Η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι συνεχής για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Για τη συνέχεια στο σημείο $(0,0)$ αρκεί να ισχύει ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

Όμως κατά μήκος της καμπύλης $\gamma: (x-k)^2+y^2=k^2$ με παραμετρική παράσταση $\vec{r}(t) = (k-k\cos t, k\sin t)$, $t \in [0,\pi]$ και $\vec{r}(0) = (0,0)$ λαμβάνουμε

$$f(\vec{r}(t)) = \frac{1}{k} e^{-\frac{1}{k^2}} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{k} e^{-\frac{1}{k^2}}$$

δηλαδή προκύπτει όριο που εξαρτάται από την θεωρούμενη καμπύλη, οπότε δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο και έτσι η συνάρτηση $f(x,y)$ δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(ii) Η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι συνεχής για κάθε $(x,y) \neq (x_0,-x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Για τη συνέχεια στα σημεία $(x_0,-x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, δηλαδή σημεία της ευθείας με εξίσωση $x+y=0$ αρκεί να ισχύει ότι:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,-x_0)} f(x,y) = f(x_0,-x_0) = a.$$

Θεωρούμε την ευθεία $\vec{r}(t) = (x_0+ta, -x_0+tB)$, $t \geq 0$, $a+B\neq 0$, με $\vec{r}(0) = (x_0,-x_0)$ για την οποία προκύπτει ότι

$$f(\vec{r}(t)) = \frac{2x_0+(a-B)t}{(a+B)t} \xrightarrow[t\to 0]{} \begin{cases} \dfrac{a-B}{a+B}, & \text{αν } x_0=0 \\ \pm\infty, & \text{αν } x_0\neq 0 \end{cases}$$

Επομένως δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο και η συνάρτηση $f(x,y)$ δεν είναι συνεχής σε κάθε σημείο της μορφής $(x_0,-x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………