ΣΑΤΜ
Γραμμική Άλγεβρα-Αναλυτική Γεωμετρία
Λύσεις του 2ου φυλλαδίου ασκήσεων

Ασκηση 1. *Δίνεται το σύστημα*

$$\begin{aligned} x - 2y + \ z &= 0 \\ 2x + \ y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

(ι) *Να επιλύσετε το σύστημα και να σχεδιάσετε το σύνολο λύσεων του.*

(ιι) *Να γράψετε το σύστημα χρησιμοποιώνας τις στήλες του. Είναι οι στήλες αυτές γραμμικά ανεξάρτητες;*

Λύση.

(ι) Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαλοιφής. Αφαιρούμε λοιπόν κατάρχήν το διπλάσιο της πρώτης εξίσωσης από τη δεύτερη ώστε να απαλείψουμε το x. Το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ \qquad y - z = 0 \end{cases}$$

Στη συνέχεια προσθέτουμε τη δεύτερη στην πρώτη εξίσωση

$$\begin{cases} x - y \qquad = 0 \\ \qquad y - z = 0 \end{cases}$$

και τέλος θέτοντας $z = t$ βρίσκουμε τη λύση

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\,.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι η ευθεία που διέρχεται από το $\vec{0}$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ιι) Το σύστημα γράφετε ισοδύναμα ως εξής

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με το (ι) το τελευταίο έχει μη-μηδενικές λύσεις και άρα οι στήλες είναι γραμμικά εξαρτημένες.
(Σημείωση: το τελευταίο είναι αναμενόμενο αφού έχουμε 3 διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^2$.)

$\square$

Ασκηση 2. *Δίνεται το σύστημα*

$$\begin{aligned} x+y+2z-w &= 0 \\ 2x-y+\ z+w &= 0 \end{aligned}$$

(ι) *Να επιλύσετε το σύστημα και να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο λύσεων του.*

(ιι) *Να γράψετε το σύστημα χρησιμοποιώνας τις στήλες του. Είναι οι στήλες αυτές γραμμικά ανεξάρτητες;*

Λύση.

(ι) Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαλοιφής. Αφαιρούμε λοιπόν κατάρχήν το διπλάσιο της πρώτης εξίσωσης από τη δεύτερη ώστε να απαλείψουμε το x. Το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} -w+x+\ y+2z=0 \\ 3w \qquad -3y-3z=0 \end{cases}$$

Στη συνέχεια αφού πρώτα διαιρέσουμε την δεύτερη εξίσωση με 3 την προσθέτουμε στην πρώτη εξίσωση

$$\begin{cases} \qquad x \qquad +2z=0 \\ -w \quad +y+\ z=0 \end{cases}$$

και τέλος θέτοντας $z=t$ και $w=s$ βρίσκουμε τη λύση

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R}\,.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι το επίπεδο που διέρχεται από το $\vec{0}$ και είναι παράγεται από τα διανύσματα $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ιι) Το σύστημα γράφετε ισοδύναμα ως εξής

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με το (ι) το τελευταίο έχει μη-μηδενικές λύσεις και άρα οι στήλες είναι γραμμικά εξαρτημένες.
(Σημείωση: το τελευταίο είναι αναμενόμενο αφού έχουμε 4 διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^2$.)

$\square$

Ασκηση 3. *Να υπολογίσετε την τιμή του α ώστε τα διανύσματα*

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix} \ \textit{και} \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

να είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Λύση. Τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{w}$ παράγουν το επίπεδο $z = 0$ και συνεπώς το α πρέπει να είναι 0. $\square$

Ασκηση 4. *Να βρείτε ένα διάνυσμα που να είναι κάθετο στο διάνυσμα*

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

και στο διάνυσμα

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Λύση. Ένα διάνυσμα κάθετο στα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι το $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ που όπως είδαμε στην άσκηση 1 παράγει την τομή των επιπέδων $x - 2y + z = 0$ και $2x + y - 3z = 0$, τα οποία είναι κάθετα στα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ αντίστοιχα. $\square$